

УДК 539.3

ЗАДАЧА ЛІНГА ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ

*В. Семерак, к.т.н., В. Косарчин, к.ф-м.н.
Львівський національний аграрний університет*

Ключові слова: температура, півпростір, контактний тиск, час, тертя, поверхня.

Методом апроксимації за допомогою кусково-сталих і лінійних функцій проведено інтегрування розв'язку плоскої квазістаціонарної задачі теплопровідності для півпростору, що нагрівається в локальній зоні високошвидкісним тепловим потоком. Чисельний аналіз проведено для трьох випадків інтенсивності теплового потоку: сталого, еліптичного та коливного. Для першого випадку показано добре узгодження наближеного розв'язку, отриманого за допомогою запропонованої методики, з відомим аналітичним.

Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язок плоскої квазістаціонарної задачі теплопровідності для півпростору, що нагрівається на вільній поверхні швидко рухомих розподіленим потоком тепла одержано у праці [5]. У зв'язку з успішним подальшим застосуванням цього розв'язку до моделювання теплових режимів різноманітних триботехнічних процесів (холодний прокат металів, шліфування, теплоутворення під час ковзання колеса по рейці [4] тощо), згадана задача є відомою в науково-технічній літературі як «задача Лінга». Задача Лінга привертає до себе увагу, по-перше, внаслідок все нових сфер її застосування, по-друге, простотою запису розв'язку і, по-третє, необхідністю дослідження (інтегрування) розв'язку для різних інтенсивностей теплового потоку. Саме ця, остання причина, як буде показано далі, й спонукала нас до написання роботи.

Постановка завдання. Розглянемо плоску граничну задачу квазістаціонарної теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{V}{k} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad -\infty \leq x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad (1)$$

$$K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} -q(x), & 0 \leq x \leq 2a, \\ 0, & -\infty < x < 0 \cup 2a < x < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

$$T \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут T – температура; K, k – коефіцієнти тепло- і температуропровідності відповідно;

V – швидкість руху лінійного потоку розподіленого з інтенсивністю $q(x)$ вздовж $0 \leq x \leq 2a$ на поверхні $y = 0$ півпростору Ox, Oy – осі ортогональної ейлерівської системи координат (рис. 1);

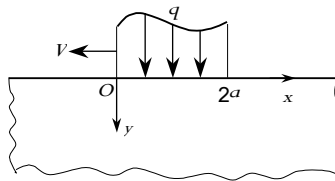


Рис. 1 Осі ортогональної ейлерівської системи координат.

Виклад основного матеріалу. Для теплових задач тертя інтенсивність фрикційного теплового потоку q дорівнює питомій потужності сил тертя [5]:

$$q(x) = fVP(x), \quad (4)$$

де f – коефіцієнт тертя, P – контактний тиск.

Позначимо

$$\xi = \frac{x}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{d}, \quad P^* = \frac{P}{P_0}, \quad d = \sqrt{\frac{2ak}{V}}, \quad Pe = \frac{Va}{2k}, \quad (5)$$

де P_0 – характерне значення контактного тиску, наприклад, максимальне значення герцівського тиску; d – ефективна глибина прогрівання у випадку відповідної нестационарної задачі теплопровідності [3]; Pe – параметр Пекле.

Із урахуванням рівності (4) та позначень (5) рівняння (1) і граничні умови (2), (3) набудуть вигляду

$$\frac{1}{4Pe} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \infty, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \begin{cases} -\Lambda P^*(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 0, & -\infty < \xi < 0 \cup 1 < \xi < \infty, \end{cases} \quad (7)$$

$$T \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty, \quad (8)$$

де

$$\Lambda = \frac{f V p_0 d}{K}. \quad (9)$$

Розглянемо високошвидкісний рух, що має місце при $Re > 5$ [5]. У цьому разі градієнтом теплового потоку в напрямі руху можна знехтувати, і рівняння теплопровідності (6) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (10)$$

Рівняння (10) і граничні умови (7), (8) є математичним записом задачі Лінга.

Розв'язок граничної задачі квазістаціонарної теплопровідності (10), (7), (8) отримаємо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є:

$$T(\xi, \eta) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^b G(\xi - \tau, \eta) P^*(\tau) d\tau, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (11)$$

де

$$G(\xi, \eta) = \frac{\exp[-\eta^2 / (4\xi)]}{\sqrt{\xi}}, \quad b = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < 0, \\ \xi, & 0 < \xi \leq 1, \\ 1, & 1 < \xi < \infty. \end{cases} \quad (12)$$

Для обчислення інтеграла в правій частині співвідношення (11) у роботі [4] пропонується розкласти функцію $P^*(\tau)$ у синус- або косинус-ряди Фур'є з подальшим точним визначенням коефіцієнтів розкладів і підсумовуванням. Оскільки вирази для розрахунку коефіцієнтів цих рядів є складними, до того, ж подані в комплексному вигляді, то в літературі ця методика не знайшла практичного застосування. Найчастіше автори задовольнялись чисельним інтегруванням (11) для конкретних розподілів контактної тиску $P^*(\tau)$. Пропонуємо методику інтегрування (11) у випадку довільної гладкої функції $P^*(\tau)$ за допомогою використання властивостей фінітних кусково-сталих і кусково-лінійних функцій.

Кусково-стала апроксимація. Введемо на проміжку $0, b$, де b означено виразом з (12), рівномірну сітку

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b, \quad \tau_i = i\delta\tau, \quad \delta\tau = b/n, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

Нехай

$$P^*(\tau) \cong \tilde{P}^*(\tau) = \sum_{i=1}^n P_i^* \cdot \varphi_i(\tau), \quad P_i^* = P^*(\tau_{i-1} + \tau_i) / 2, \quad (14)$$

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \\ 0, & \tau \notin [\tau_{i-1}, \tau_i] \end{cases} \quad (15)$$

Рівномірна похибка наближення (14), (15) становить $O(\delta\tau)$.

Підставивши апроксимовану функцію $\tilde{P}^*(\tau)$ (14) під знак інтеграла у

розв'язку (11), отримаємо:

$$T(\xi, \eta) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n P_i^* \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta) H(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (16)$$

де

$$G_i^{(0)}(\xi, \eta) = \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta), \quad \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} G(\xi - \tau, \eta) d\tau, \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

де $H(\cdot)$ – одинична функція Гевісайда; $G(\xi, \eta)$ – функція Гріна (12). Інтегрування частинами (17) дозволило записати функцію $\tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta) = & -2\sqrt{\xi - \tau_i} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_i)}\right] + 2\sqrt{\xi - \tau_{i-1}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_{i-1})}\right] - \\ & - \eta \sqrt{\pi} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi - \tau_i}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi - \tau_{i-1}}}\right) \right], \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18) \end{aligned}$$

де $\operatorname{erf}(\cdot)$ – інтеграл імовірностей.

При $\eta = 0$ співвідношення (18) набуває вигляду

$$\tilde{G}_i^{(0)}(\xi, 0) = 2(\sqrt{\xi - \tau_{i-1}} - \sqrt{\xi - \tau_i}), \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

і з розв'язку (16) отримуємо вираз для визначення температури на поверхні півпростору $T(\xi) \equiv T(\xi, 0)$:

$$T(\xi) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n P_i^* \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, 0) H(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (20)$$

Кусково-лінійна апроксимація. Поставимо кожному вузлу τ_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, сітки (13) у відповідність кусково-лінійну функцію («функцію-дашок»):

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau) &= \begin{cases} \mathcal{L}_1 - \tau \delta \tau, & \tau \in \mathcal{L}_0, \tau_1 \mathcal{J} \\ 0, & \tau \notin \mathcal{L}_0, \tau_1 \mathcal{J} \end{cases} & \varphi_n(\tau) &= \begin{cases} \mathcal{L} - \tau_{n-1} \delta \tau, & \tau \in \mathcal{L}_{n-1}, \tau_n \mathcal{J} \\ 0, & \tau \notin \mathcal{L}_{n-1}, \tau_n \mathcal{J} \end{cases} \\ \varphi_i(\tau) &= \begin{cases} \mathcal{L} - \tau_{i-1} \delta \tau, & \tau \in \mathcal{L}_{i-1}, \tau_i \mathcal{J} \\ \mathcal{L}_{i+1} - \tau \delta \tau, & \tau \in \mathcal{L}_i, \tau_{i+1} \mathcal{J} \\ 0, & \tau \notin \mathcal{L}_{i-1}, \tau_{i+1} \mathcal{J} \end{cases} & i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (21)$$

Поклавши

$$P^*(\tau) \equiv \tilde{P}^*(\tau) = \sum_{i=0}^n P_i^* \cdot \varphi(\tau), \quad P_i^* \equiv P^*(\tau_i), \quad (22)$$

розв'язок (11) запишемо як

$$T(\xi, \eta) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi} \delta \tau} \sum_{i=0}^n P_i^* G_i^{(1)}(\xi, \eta) H(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} G_0^{(1)}(\xi, \eta) &= \tau_1 \tilde{G}_1^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{G}_1^{(1)}(\xi, \eta), \\ G_n^{(1)}(\xi, \eta) &= \tilde{G}_n^{(1)}(\xi, \eta) - \tau_{n-1} \tilde{G}_n^{(0)}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
G_i^{(1)}(\xi, \eta) &= \tilde{G}_i^{(1)}(\xi, \eta) - \tau_{i-1} \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta) + \\
&\quad + \tau_{i+1} \tilde{G}_{i+1}^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{G}_{i+1}^{(1)}(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\
\tilde{G}_i^{(1)}(\xi, \eta) &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \tau G(\xi - \tau, \eta) d\tau, \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{25}$$

За допомогою міркувань, подібних до тих, що використовувались під час обчислення інтеграла (17), для функції $G_i^{(1)}(\xi, \eta)$ (25) знаходимо

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_i^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{2}{3}(\xi - \tau_i) \sqrt{\xi - \tau_i} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_i)}\right] - \\
&\quad - \frac{2}{3}(\xi - \tau_{i-1}) \sqrt{\xi - \tau_{i-1}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_{i-1})}\right] + \\
&\quad + \left(\frac{\eta^2}{6} + \xi\right) \tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta), \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{26}$$

де функція $\tilde{G}_i^{(0)}(\xi, \eta)$ задається формулою (18).

Беручи до уваги співвідношення (19), із формули (26) при $\eta = 0$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_i^{(1)}(\xi, 0) &= \frac{2}{3}(2\xi + \tau_{i-1}) \sqrt{\xi - \tau_{i-1}} - \\
&\quad - \frac{2}{3}(2\xi + \tau_i) \sqrt{\xi - \tau_i}, \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{27}$$

Підставивши вирази (19) та (27) у формули (24), з рівності (23) одержуємо розподіл температури на поверхні півпростору у вигляді

$$T(\xi) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi} \delta \tau} \sum_{i=0}^n P_i^* G_i^{(1)}(\xi, 0) H(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \tag{28}$$

де

$$\begin{aligned}
G_0^{(1)}(\xi, 0) &= 2\left(\tau_1 - \frac{2}{3}\xi\right) \sqrt{\xi} + \frac{4}{3}(\xi - \tau_1) \sqrt{\xi - \tau_1}, \\
G_n^{(1)}(\xi, 0) &= \frac{4}{3}(\xi - \tau_{n-1}) \sqrt{\xi - \tau_{n-1}} + 2\left(\tau_{n-1} - \frac{1}{3}\tau_n - \frac{2}{3}\xi\right) \sqrt{\xi - \tau_n}, \\
G_i^{(1)}(\xi, 0) &= \frac{4}{3}(\xi - \tau_{i-1}) \sqrt{\xi - \tau_{i-1}} + 2\left(\tau_{i-1} - \frac{2}{3}\tau_i + \tau_{i+1} - \frac{4}{3}\xi\right) \sqrt{\xi - \tau_i} + \\
&\quad + \frac{4}{3}(\xi - \tau_{i+1}) \sqrt{\xi - \tau_{i+1}}, \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{29}$$

Висновки. У випадку ідеально гладких поверхонь співдотичних тіл найчастіше у застосуваннях користуються еліптичним (герцівським) розподілом контактного тиску [2]:

$$P = P_0 \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}}, \quad P_0 = \frac{2P}{\pi a}, \quad 0 \leq x \leq 2a, \tag{30}$$

де P – лінійна притискальна сила.

Якщо ж робочі поверхні тіл шорсткі, то беруть суперпозицію герцівського розподілу (30) з розподілом, що має коливний характер. Як приклад візьмемо косинус-флуктуацію з довжиною хвилі 5π та амплітудою $P_0/4$:

$$P(x) = P_0 \left\{ \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}} - \frac{1}{4} \cos \left[5\pi \frac{(x-a)^2}{a} \right] \right\}, \quad 0 \leq x \leq 2a. \quad (31)$$

На тяжко навантажених контактах, коли матеріали тіл перебувають у стані, близькому до пластичного, тиск вирівнюється:

$$P(x) = \frac{\pi}{4} P_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 2a. \quad (32)$$

Для розподілу (32) температурне поле у півпросторі знаходимо безпосереднім інтегруванням розв'язку (11), (12) з використанням значення (18) інтеграла (17). У результаті одержуємо

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ T_{\max} \theta(\xi, \eta), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ T_{\max} \mathcal{L}^{\theta}(\xi, \eta) - \theta(\xi - 1, \eta) \mathcal{L}^{\theta} & 1 \leq \xi < \infty, \end{cases} \quad (33)$$

де

$$\theta(\xi, \eta) = \sqrt{\xi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\xi}\right) - \eta \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right), \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (34)$$

$$T_{\max} = \Lambda \sqrt{\pi} / 2 \cong 0.886 \Lambda, \quad (35)$$

$\operatorname{erfc}(\cdot) = 1 - \operatorname{erf}(\cdot)$, а стала Λ визначається формулою (9). Значимо, що T_{\max} (35) – це максимальна температура, що досягається на поверхні півпростору в точці $\xi = 1$ ($x = 2a$ – точка виходу зі смуги нагрівання). Формули (9) і (35) підтверджують висновок Блока про зростання максимальної температури на фрикційному контакті прямо пропорційно до кореня квадратного зі швидкості ковзання тіл (за заданої притискальної сили). З іншого боку, за заданої швидкості ковзання максимальна температура є лінійною функцією питомої потужності сил тертя $f V P_0$.

Розподіл температури (33) ми використовували для тестування запропонованої наближеної методики. Для герцівського (30) і коливного (31) розподілів контактного тиску отримати точні аналітичні вирази для температури у півпросторі не вдалось. Тому з цією метою скористалися наближеннями цих розподілів за допомогою фінітних функцій у вигляді (14) або (22). Чисельний аналіз показав, що у разі герцівського розподілу (30) максимальне значення поверхневої температури T_{\max} досягається в середині ділянки нагрівання, в точці $x = 1.652a$ і дорівнює

$$T_{\max} = 0.872 \Lambda. \quad (36)$$

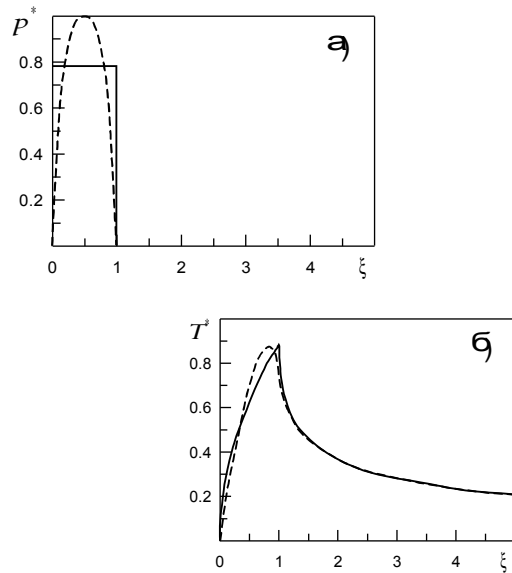


Рис. 2. Безрозмірні поверхневі температури

Із порівняння формул (35) і (36) випливає, що максимальна контактна поверхнева температура за рівномірного розподілу контактного тиску (32) лише на 1,4% вища, ніж за його еліптичного розподілу (30). Розраховані безрозмірні контактні тиски $p^*(\xi) = p(x)/p_0$ за формулою (30) для герцівського розподілу (пунктирні криві) і формулою (32) (суцільні криві) та відповідні їм безрозмірні поверхневі температури $\theta(\xi) = T(x,0)/\Lambda$ показано на рис. 2.

Бібліографічний список

1. Гриліцький Д. В. Дослідження термомеханічних процесів під час шліфування / Д. В. Гриліцький, О. О. Євтушенко, В. Й. Паук. – Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – 31. № 2. – С. 14–21.
2. Джонсон К. Механика контактного взаємодія / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 509 с.
3. Чичинадзе А. В. Расчет, испытание и подбор фрикционных пар / А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, А. Г. Гінзбург. – М. : Наука, 1979. – 268 с.
4. Kihara Y. A study on occurrence of heatstreaks in cold rolling (1st report) / Y. Kihara, K. J. Okada. – Jap. Soc. Lubr. Eng. – 1984. – 29, No. 11. – P. 809–816.
5. Ling F. Temperature distribution in a semi-infinite solid under a fast-moving arbitrary heat source / F. Ling, C. Lang. – Int. J. Heat Mass Transfer. – 1971. – 14, No. 2. – P. 199–206.

Семерак В., Косарчин В. Задача Линга для полупространства

Методом аппроксимации при помощи кусочно-постоянных и линейных функций проведено интегрирование плоской квазистационарной задачи теплопроводности для полупространства, которое нагревается в локальной зоне высокоскоростным тепловым потоком. Числовой анализ проведен для трех случаев интенсивности теплового потока: постоянного, эллиптического и колебательного. Для первого случая показана хорошая совпадаемость приближенного решения, которое получено при помощи предложенной методики, с известным аналитическим.

Ключевые слова: температура, полупространство, контактное давление, время, трение, поверхность.

Semerak V., Kosarchyn V. Lings problem for semi-space

The integration of solution to Ling's heat problem is carried out by means of piecewise-constant and linear functions. Numerical analysis is made for three cases of contact pressure intensity: constant, elliptic and oscillatory. In the first case good agreement of the approximate solution, obtained by means of the procedure proposed with the known analytic one is shown.

Key words: temperature, semi-space, contact pressure, time, frictional, surface.